

МЕХАΝІКА

УДК 529.539

ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ В ОБОЛОЧКЕ
С УЧЕТОМ ЭФФЕКТА ЖЕСТКОСТИ ВНЕШНЕЙ СРЕДЫ

Р.Ю.АМЕНЗАДЕ, Г.М.САЛМАНОВА, Т.М.МУРТУЗЗАДЕ

*Бакинский Государственный Университет**mexanika.bsu.az@mail.ru*

В работе исследуется двумерная задача о распространении волн малой амплитуды в идеальной несжимаемой жидкости, протекающей в упругой изотропной оболочке постоянного кругового сечения. Учитывается жесткость внешней среды. Получено дисперсионное уравнение. Для варианта резиновой оболочки, содержащей воду выявлено влияние безразмерной жесткости на волновые характеристики.

Ключевые слова: идеальная жидкость, упругая оболочка, волны, затухание

1. Основные теоретические положения и постановка задачи

Считается, что одномерное приближение охватывает большую часть свойств, присущих распространению волн в трубках постоянного сечения с протекающей в ее полости жидкостью, некоторые эффекты упругости, в частности, возникновение новых типов волн, не могут быть описаны этой теорией. В этой связи в данной работе дается двумерное линеаризованное рассмотрение осесимметричного течения идеальной несжимаемой жидкости в упругой оболочке с учетом жесткости внешней среды.

В систему уравнений, описывающих распространение волн в деформируемых оболочках, содержащих жидкость, входят уравнения движения оболочки и жидкости, кинематические контактные условия на границе раздела жидкости и оболочки, а также ограниченность искомым функции на оси оболочки. Ниже приведем соответствующие соотношения.

Уравнения движения оболочки. Пусть в невозмущенном состоянии дана цилиндрическая круговая оболочка постоянного сечения, имеющего радиус R , плотность ρ_* и толщину $2h$. Будем использовать

цилиндрическую систему координат (x, θ, r) и ограничимся рассмотрением осесимметричных возмущений, при которых исключается крутильная волна в оболочке. Предполагая оболочку полубесконечной для осевой x и радиальной координаты r , имеем:

$$0 \leq x < +\infty, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Тогда перемещения точек серединой поверхности $(\bar{u}, 0, \bar{w})$ зависят только от x и времени t , а на стенку оболочки действуют внешние напряжения $(\sigma_1, 0, \sigma_2)$. Обозначим через T_1 и T_2 натяжения в продольном и окружном направлениях, отнесенные к единице длины. Теперь безмоментные осесимметричные уравнения движения оболочки запишем в виде [1].

$$\begin{aligned} 2\rho_*h \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2} &= \frac{\partial T_1}{\partial x} + \sigma_1, \\ 2\rho_*h \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} &= -\frac{T_2}{R} + \sigma_2. \end{aligned} \quad (1)$$

Обоснованность используемых здесь уравнений (1) определено тем, что для длинноволновых процессов математически установлено пренебрежимо малое влияние моментных членов на волновые характеристики при осесимметричном течении жидкости в оболочке [2].

Соотношения упругости. Линейные соотношения, связывающие возмущения напряжений T_1 и T_2 с перемещениями \bar{u} и \bar{w} для изотропных оболочек записываются следующим образом [1].

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \nu \frac{\bar{w}}{R} \right), \\ T_2 &= \frac{2Eh}{1-\nu^2} \left(\frac{\bar{w}}{R} + \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь E – модуль Юнга, а ν – коэффициент Пуассона.

Напряжения, действующие на оболочку. На стенку оболочки действуют два типа напряжений. 1. Гидродинамическое напряжение, действующее со стороны жидкости и равное p – где оно возмущение давления жидкости в направлении r . Напряжения на стенке [3] моделируется в предположении, что внешняя среда вносит дополнительную жесткость. Таким образом, имеем равенства

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= -G_1 \frac{\partial \bar{u}}{\partial t}, \\ \sigma_2 &= p|_{r=R} - G_2 \frac{\partial \bar{w}}{\partial t},\end{aligned}\tag{3}$$

в которых G_1 и G_2 – задаваемые эмпирические параметры.

Уравнение движение и кинематическое контактное условие для жидкости. Жидкость принимаем идеальной, однородной и несжимаемой (с плотностью ρ_f). Течение, возникающее при возмущении, будем считать безвихревым. Тогда, без учета массовых сил (силы тяжести), с использованием потенциала скорости φ , уравнение неразрывности можно записать в следующей форме

$$\Delta \varphi = 0,\tag{4}$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \text{оператор Лапласа,}$$

а линейное уравнение Эйлера в виде

$$p = -\rho_f \frac{\partial \varphi}{\partial t}.\tag{5}$$

Скорость жидкости \vec{V} , соответствующая возмущению, связана с потенциалом φ равенством

$$\vec{V} = \text{grad} \varphi.\tag{6}$$

Учитывая равенство (6), линеаризованное контактное условие есть

$$\frac{\partial \bar{w}}{\partial t} = \frac{\partial \varphi}{\partial r} \quad \text{при } r = R.\tag{7}$$

На оси трубки $r = 0$ потенциал должен удовлетворять условию ограниченности.

Отметим, что пренебрежение вязкостью основывается на данных о том, что профили скорости, например, в больших артериях [3], приблизительно плоские, т.е. влияние вязкости ограничено тонкими пограничными слоями на стенке.

2. Решение уравнения гидродинамики. Теперь задача полностью поставлена. Сведем ее к решению обыкновенных дифференциальных уравнений. С этой целью воспользуемся методом Фурье (метод разделения переменных). Поэтому будем сначала искать частные решения уравнения (4), не равные тождественно нулю, в виде произведения

$$\varphi = A_*(t)\varphi_1(x)\varphi_1(r), \quad (8)$$

где $A_*(t)$ – пока еще не определенная функция. Подставляя (8) в уравнение (4), получим

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \frac{d^2\varphi_2}{dr^2} + \frac{\varphi_1}{\varphi_2} \frac{1}{r} \frac{d\varphi_2}{dr} = 0$$

или

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} \Big/ \varphi_1 = - \left(\frac{d^2\varphi_2}{dr^2} \frac{1}{\varphi_2} + \frac{1}{r} \frac{1}{\varphi_2} \frac{d\varphi_2}{dr} \right). \quad (8')$$

Последнее равенство, левая часть которого зависит только от x , а правая – только от r возможно лишь в том случае, если обе части не зависят ни от x , ни от r , т.е. представляют одну и ту же постоянную. Обозначим эту постоянную через γ^2 . Эта константа разделения, физический смысл которой квадрат волнового числа. Тогда из равенства (8') получим два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2\varphi_1}{dx^2} - \gamma^2\varphi_1 = 0, \quad (9)$$

$$\frac{d^2\varphi_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\varphi_2}{\partial r} - \gamma^2\varphi_2 = 0. \quad (10)$$

Решение дифференциального уравнения (9) имеет вид

$$\varphi_1 = A_1 e^{-i\gamma x} + A_1' e^{i\gamma x},$$

где A_1 и A_1' – произвольные постоянные интегрирования. Оставляя в рассмотрении только волну, бегущую в положительном направлении оси x ($A_1' = 0$), для функции φ_1 запишем

$$\varphi_1 = A_1 e^{-i\gamma x}. \quad (11)$$

Для решения уравнения (10) введем безразмерную переменную $z = i\gamma r$. Это сводит (10) к уравнению Бесселя

$$\frac{d^2\varphi_2}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{d\varphi_2}{dz} + \varphi_2 = 0.$$

Его общее решение имеет вид

$$\varphi_2 = A_2 J_0(i\gamma r) + A_2' Y_0(i\gamma r).$$

Здесь $J_0(i\gamma r)$ – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а $Y_0(i\gamma r)$ – функция Бесселя второго рода нулевого порядка. Так как $Y_0(i\gamma r) \rightarrow \infty$ при $r \rightarrow 0$, то должно быть $A_2' = 0$. Это условие дает

$$\varphi_2 = A_2 J_0(i\gamma r). \quad (12)$$

Подставляя выражения (11) и (12) в (8) и принимая $A(t) = A_*(t)A_1A_2$, для потенциала запишем

$$\varphi = A(t)J_0(i\gamma r)\exp(-i\gamma x). \quad (13)$$

3. Дисперсионное уравнение. Прежде всего приведем уравнения движения оболочки в перемещениях. С этой целью, используя в двух уравнениях (1) равенства (2) и (3), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial \bar{w}}{\partial x} - \frac{(1-\nu^2)}{2h} \frac{G_1}{E} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} &= \frac{1}{a_1^2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial t^2}, \\ -\frac{\bar{w}}{R} - \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \xi \frac{1-\nu^2}{E} p|_{r=R} - \xi(1-\nu^2) \frac{G_2}{E} \frac{\partial \bar{w}}{\partial t} &= \frac{R}{a_1^2} \frac{\partial^2 \bar{w}}{\partial t^2} = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

где, для краткости записи, введены величины

$$c_0^2 = \frac{E}{\rho_*(1-\nu^2)}, \quad \xi = \frac{R}{2h}, \quad a_1^2 = \frac{E}{(1-\nu^2)\rho_*},$$

причем в силу тонкостенности $\xi \gg 1$. Далее положим, что

$$\bar{w}(t) = w(t)\exp(-i\gamma x), \quad (15)$$

$$\bar{u}(t) = u(t)\exp(-i\gamma x). \quad (16)$$

Здесь $w(t)$ и $u(t)$ – неизвестные функции. Построение потенциала φ будет завершено, если воспользоваться формулами (13) и (15) в контактном условии (7). Отсюда непосредственно вытекает зависимость

$$A(t) = \frac{\dot{w}(t)}{(i\gamma)J_0(i\gamma R)},$$

в которой точка означает дифференцирование по t , а штрих – дифференцирование по r . Отсюда можно записать

$$\varphi = \dot{w} \frac{J_0(i\gamma r)}{(i\gamma)J_0(i\gamma R)} \exp(-i\gamma x).$$

Следовательно, пользуясь выражением (5), заключаем, что

$$p = -\rho_f \ddot{w} \frac{J_0(i\gamma r)}{(i\gamma)J_0(i\gamma R)} \exp(-i\gamma x). \quad (17)$$

Дальнейшая подстановка формул (15)- (17) в систему уравнений (14), приводит к следующей системе дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} -\gamma^2 u - i\nu \frac{\gamma}{R} w - \frac{(1-\nu^2)G_1}{2h} \frac{1}{E} \dot{u} &= \frac{1}{c_1^2} \ddot{u}, \\ -\frac{w}{R} + i\nu \gamma u - \xi \frac{1-\nu^2}{E} \rho_f \frac{J_0(i\gamma R)}{(i\gamma)J_0(i\gamma R)} \ddot{w} - \xi(1-\nu^2) \frac{G_2}{E} \dot{w} &= \frac{R}{c_1^2} \ddot{w}. \end{aligned} \quad (18)$$

В ряде случаев волновое движение в его зависимости от времени может быть синусоидальным, так что можно выделить множитель, зависящий только от t и имеющий вид $\exp(i\Omega t)$, где действительная задаваемая величина Ω – угловая частота. Таким образом, будем исходить из выражений для перемещений в виде

$$w = w_0 \exp(i\Omega t), \quad u = u_0 \exp(i\Omega t). \quad (19)$$

Здесь u_0 и w_0 - неизвестные, вообще говоря комплексные постоянные.

Последующая подстановка формул (19) в (18) дает для коэффициентов u_0 и w_0 систему двух линейных однородных алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} (\omega^2 - \delta^2 - i\xi g_1)u_0 - i\nu \delta w_0 &= 0, \\ -i\nu \delta u_0 + \{1 - \omega^2 M(i\delta) + i\xi g_2\}w_0 &= 0. \end{aligned} \quad (20)$$

В (20) дополнительно введены следующие величины

$$\begin{aligned} \delta = R\gamma, \quad \omega^2 = \frac{R^2}{c_0^2} \Omega^2, \quad \rho = \frac{a_1^2}{a_2^2} \frac{\rho_f}{\rho_*}, \quad \frac{1}{a_2^2} = \frac{1-\nu^2}{E} \rho_f, \\ g_1 = R(1-\nu^2)\Omega \frac{G_1}{E}, \quad g_2 = R(1-\nu^2)\Omega \frac{G_2}{E}, \end{aligned}$$

а функция $M(i\delta)$ определяется следующим образом :

$$M(i\delta) = 1 + \xi\rho \frac{J_0(i\delta)}{(i\delta)J_0'(i\delta)}.$$

Два уравнения (20) имеют нетривиальное решение только в том случае, если имеем равенство нулю ее определителя

$$\begin{vmatrix} \omega^2 - \delta^2 - i\xi g_1 & -i\nu\delta \\ -i\nu\delta & 1 - \omega^2 M(i\delta) + i\xi g_2 \end{vmatrix} = 0. \quad (21)$$

При $g_1 = g_2 = 0$ приходит к результату работы [2].

Отметим, что при представлении мод движения в виде (11) и (19) для заданной частоты в общем случае волновое число δ следует считать комплексной величиной, что соответствует затуханию волны в гидроупругой системе, вызванному наличием внешнего трения.

Раскрывая (21), получим следующее дисперсионное уравнение

$$\omega^4 M(i\delta) - \omega^2 \{1 + i\xi g_2 + M(i\delta)\delta^2 + i\xi g_1 M(i\delta)\} + i\delta^2 \xi g_2 + i\xi g_1 - \xi^2 g_1 g_2 + (1 - \nu^2) = 0. \quad (22)$$

4. Длинноволновое приближение и численный пример. В дальнейшем для длинных волн воспользуемся асимптотическим представлением функций Бесселя в виде

$$J_0(i\delta) \approx 1, \quad J_0'(i\delta) = -J_1(i\delta) \approx \frac{1}{2}i\delta, \quad \text{когда } |\delta| \rightarrow 0.$$

Далее принимая $g_1 = g_2 = g$, получим

$$\delta^4 \{ \omega^2 - (1 - \nu^2) - i\xi g \} + \delta^2 \{ \omega^2 - \omega^4 + 2\xi\rho\omega^2 + \xi^2 g^2 \} + i \{ 2\xi g \omega^2 - \xi g \} - \{ 2\rho\xi\omega^4 - 2i\xi^2 \rho g \omega^2 \} = 0. \quad (23)$$

Для численной реализации вначале установим порядок величины ω , соответствующей опытным данным для резиновой трубки со следующими параметрами: $E = 15 \cdot 10^5 \frac{H}{M^2}$, $\nu = 0,49$, $R = 0,02M$, $\xi = 20$, $\rho_* = 10^3 \frac{K\mathcal{Z}}{M^3}$, применительно к варианту ее заполнения водой с плотностью $\rho_f = 10^3 \frac{K\mathcal{Z}}{M^3}$ при $\Omega = 10 \text{сек}^{-1}$.

Такая схематизация весьма важна, так как вода определяющим образом влияет на протекания многих физико-химических, биологических и технологических процессов. Тогда $c_0^2 \approx 1974 \frac{M^2}{\text{сек}^2}$, $\rho = 1$, а $\omega \approx 0,0045$. Итак уравнение (23) приближенно можно записать в виде

$$\{ (1 - \nu^2) + i\xi g \} \delta^4 - \{ \xi(2\omega^2 + \xi g^2) - i\xi g \} \delta^2 - \{ 2\xi\omega^2(-\omega^2 + i\xi g) \} = 0. \quad (24)$$

Дисперсионное уравнение для δ^2 (24) имеет два корня, что указывает на существование двух типов волн. С большей скоростью $c_2 = \omega/\delta_{02}$ распространяется волна в оболочке, а с меньшей $c_1 = \omega/\delta_{01}$ волна давления в жидкости. Причем δ_{0j} ($j=1,2$) выбираются положительными, а для затухания волны необходимо, чтобы мнимая часть δ была отрицательной.

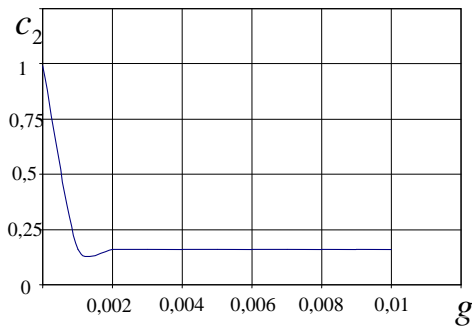


Рис.1

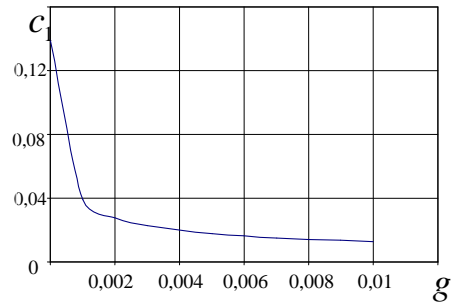


Рис.2.

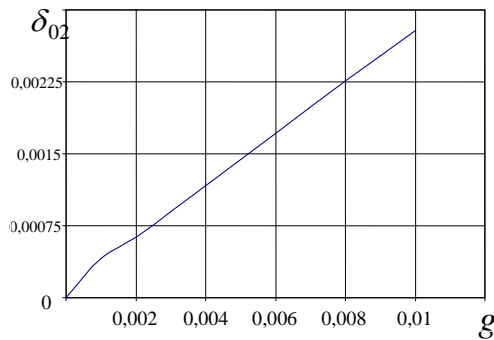


Рис.3.

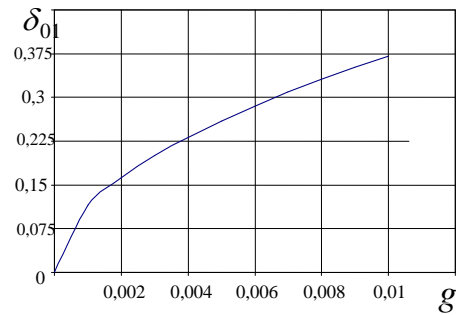


Рис.4.

На рис.1 и 2 приведены зависимости скорости распространения волны, соответственно, в оболочке и жидкости. Графики на рис.3 и 4 соответствуют коэффициенту затухания в оболочке и заполнителе.

Таким образом, приходим к выводу, что наличие внешней жесткости приводит к эффекту затухания, несмотря на упругие свойства системы “оболочка-жидкость”.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вольмир А.С. Оболочки в потоке жидкости и газа. Задачи аэроупругости. М.: Наука, 1976, 416 с.
2. Амензаде Р.Ю. Неосесимметричное колебание идеальной жидкости в упругой оболочке. ДАН СССР. т. 229, №3, 1976, с. 566-568.
3. Педли Т. Гидродинамика крупных сосудов. М.: Мир, 1983, 400 с.

XARİCİ MÜHİTİN SƏRTLİYİNİ NƏZƏRƏ ALMAQLA ÖRTÜKDƏ MAYENİN NƏBZİ AXINI

R.Y.ƏMƏNZADƏ, G.M.SALMANOVA, T.M.MURTUZZADƏ

XÜLASƏ

İşdə dairəvi en kəsiyi olan elastiki, izotrop örtükdə axan ideal, sıxılmayan mayedə kiçik amplitudlu dalğaların yayılması haqqında ikiölçülü məsələ tədqiq olunur. Xarici mühitin sərtliyi nəzərə alınır. Dispersiya tənliyi alınır. Suyu özündə saxlayan rezin örtük üçün dalğa xarakteristikalarına ölçüsüz sərtliyin təsiri aşkar edilmişdir.

Açar sözlər: ideal maye, elastiki örtük, dalğalar, sönmə

PULSATING FLUID FLOW IN THE SHELL WITH THE INCLUSION OF THE STIFFNESS OF THE ENVIRONMENT

R.Y.AMENZADEH, G.M.SALMANOVA, T.M.MURTUZZADEH

SUMMARY

The work investigates the two-dimensional task about distribution of waves of small amplitude in the ideal incompressible liquid proceeding in an elastic isotropic cover of constant circular section. Rigidity of environment is considered. The dispersive equation is received. For the option of the rubber cover containing water, the influence of dimensionless rigidity on wave characteristics is revealed.

Key words: ideal liquid, elastic cover, the waves, attenuation

Принято в редакцию: 19.02.2013 г.

Подписано к печати: 06.03.2013 г.